

۱- گزینه ۳ صحیح است.

به شرطی صفحه مماس برویه (با نرمالی موازی گرادیان رویه) عمود بر خط است که نرمال صفحه (همان گرادیان رویه) با هادی خط موازی، ضریبی از هم باشند.

$$\vec{N} = \nabla f = (3x^2y^2, 2x^3y, -1) \text{ نرمال صفحه}$$

$$\vec{V} = t \text{ ضرایب} = (-3, 4, 1) \text{ هادی خط}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط توازی}} \frac{3x^2y^2}{-3} = \frac{2x^3y}{4} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2y^2 = 3 \\ 2x^3y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{3y}{2x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{معادله اول}]{\text{جایگذاری در}} 3x^2\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس دو نقطه مورد نظر $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ هستند.

۲- گزینه ۳ درست است.

بردار هادی خط مماس $\leftarrow$ حاصلضرب خارجی گرادیان رویه ها

$$\begin{cases} \nabla f = (2x, 2y, -2z) \\ \nabla g = (1, 1, 1) \end{cases} \xrightarrow{A} \nabla f(1, 3, 2) = (2, 6, -4)$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \nabla f(A) \times \nabla g(A) = (10, -6, -4)$$

$$D: \frac{x-1}{10} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-4} = t \Rightarrow D(t) = (10t+1, -6t+3, -4t+2)$$

۳- گزینه ۴ صحیح است.

برای نرمال صفحه مماسی بر رویه، از گرادیان رویه استفاده می‌کنیم. چون در سوال از نقطه خاصی صحبت نشده، بتر است از نقطه دلخواه (C, C, C) که صادق بر رویه است، استفاده نماییم.

$$\begin{cases} \nabla f = (yz, xz, xy) \rightarrow \nabla f(C, C, C) = (C^2, C^2, C^2) = \vec{N} \\ p : C^2(x - C) + C^2(y - C) + C^2(z - C) = 0 \Rightarrow x + y + z = 3C \end{cases}$$

پس طول، عرض و ارتفاع از مبدا صفحه مورد نظر $3C$ می‌شود که حاصلضرب آنها $27C^3 = (3C)^3$ است.

۴- گزینه ۲ صحیح است.

برای محاسبه مشتق جهتی مطلوب مسئله، نیاز به مولفه‌های بردار گرادیان تابع داریم. برای این منظور از اطلاعات مسئله استفاده می‌کنیم.

$$D_{u_1} f(p) = \nabla f(p) \cdot \frac{u_1}{|u_1|} = (f_1(p), f_2(p)) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1(p), f_2(p)) = 2\sqrt{2}$$

$$D_{u_2} f(p) = \nabla f(p) \cdot \frac{u_2}{|u_2|} = (f_1(p), f_2(p)) \cdot \frac{(0, -2)}{2} = -f_2(p) = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(p) + f_2(p) = 4 \\ f_2(p) = 3 \end{cases} \Rightarrow f_1(p) = 1 \Rightarrow \nabla f(p) = (1, 3)$$

$$D_{u_3} f(p) = \nabla f(p) \cdot \frac{u_3}{|u_3|} = (1, 3) \cdot \frac{(-1, -2)}{\sqrt{5}} = \frac{-1-6}{\sqrt{5}} = -\frac{7}{\sqrt{5}}$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{روش ضرب لاگرانژ: } \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2, -3, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ 1 = \lambda z \\ g = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y \\ -\frac{3}{1} = \frac{y}{z} \Rightarrow z = -\frac{1}{3}y \end{cases} \xrightarrow{g} \left(-\frac{2}{3}y\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 = 14$$

$$\Rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} x = \mp 2 \\ z = \mp 3 \end{cases}$$

پس دو نقطه بحرانی $B(2, -3, 3), A(-2, 3, -3)$ است.

$f(A) = -15 \rightarrow \min$ مطلق

$f(B) = 13 \rightarrow \max$ مطلق